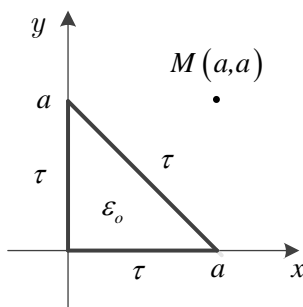


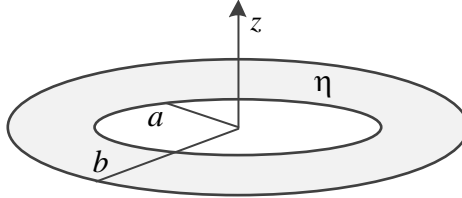
2.9. Питања и задаци за самостални рад

1. Дефиниција електромагнетског поља?
2. Чиме се објашњава очување вриједности класичне теорије електромагнетизма и након открића Лоренца, Планка, Ајнштајна ...?
3. Шта сматрамо физички малом запремином и физички малим интервалом времена?
4. Напишите и објасните израз за Лоренцову силу?
5. Која су три фундаментална својства наелектрисања?
6. Једна од пет **проводних** лопти наелектрисана је наелектрисањем Q , а остале четири су ненаелектрисане. Како ће се расподијелити наелектрисање Q , ако се по двије лопте међусобно додирују, али тако да се двије исте лопте могу додирнути само једном. Док се двије лопте додирују утицај преостале три може се занемарити.
Одговор: $Q_1 = Q/16$, $Q_2 = Q/16$, $Q_3 = Q/8$, $Q_4 = Q/4$, $Q_5 = Q/2$.
7. Да ли се на основу израза за Кулонов закон имају све информације о електричној сили између два непокретна тачкаста наелектрисања или су потребна додатна објашњења? Објасните зашто.
8. Да ли је могуће извести принцип суперпозиције Кулонових сила из Кулонова закона?
9. Да ли постоји електрична сила на усамљено наелектрисано тијело од његовог наелектрисања?
10. Зашто гравитациону и електричну силу доживљавамо на различите начине? (И једна и друга дјелују „на даљину“. Нормално нам је да тијело пада када га испустимо, а изненади нас кад под дејством електричне силе тијело крене према горе.)
11. У три тјемена квадрата странице a смјештена су наелектрисања Q_1 , Q_2 и $Q_3=Q_1$. Наелектрисања Q_1 и Q_3 налазе се у дијагонално супротним тјеменима. Провјерити да ли се наелектрисања Q_1 , Q_2 и Q_3 могу одабрати тако да сила на позитивно наелектрисање Q смјештено у четврто тјеме квадрата буде једнака нули?
Одговор: $Q_1 = Q_3 > 0$, $Q_2 = -2\sqrt{2}Q_1$ или $Q_2 > 0$, $Q_1 = Q_3 = -\sqrt{2}Q_2/4$.
12. Дефиниција електричног поља?
13. Дефиниција електростатичког поља?
14. Једначине електростатичког поља у вакууму (интегрални и диференцијални облик). Зашто је поље потпуно одређено тим једначинама?
15. На осама x , y и z правоуглог координантног система у тачкама $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$ и $C(0,0,a)$ распоређена су наелектрисања $-Q$, $-Q$ и $+2Q$, респективно. Одредити вектор јачине електричног поља у тачки $M(a,a,a)$. [42]
Рјешење: $\mathbf{E}(M) = Q\sqrt{2}(\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})/(16\pi\epsilon_0 a^2)$.
16. Троугаони рам на слици равномјерно је наелектрисан подужним наелектрисањем τ . Одредити вектор јачине електричног поља у тачки са координатама $M(a,a)$. Средина је ваздух. [42].



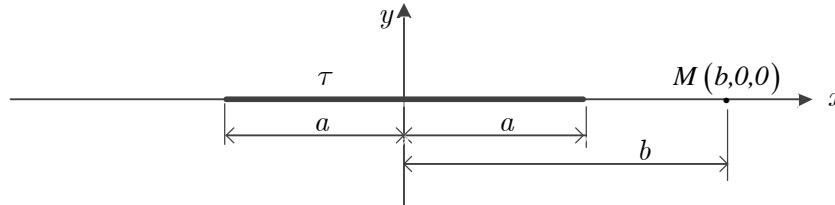
Рјешење: $\mathbf{E}(M) = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 a} (1 + \sqrt{2})(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$.

17. Кружни танки равни прстен полупречника a и b ($a < b$) равномерно је наелектрисан површинским наелектрисањем η . (а) Одредити вектор јачине електричног поља у тачки $M(0,0,z)$. (б) Из резултата под (а) добити израз за вектор електричног поља за случај диска полупречника b , [42].



Рјешење: $\mathbf{E} = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right) \hat{\mathbf{i}}_z$, $\mathbf{E} = \frac{\eta}{2\epsilon_0} \left(\operatorname{sgn} z - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}} \right) \hat{\mathbf{i}}_z$.

18. Веома танак штап дужине $2a$ равномерно је по дужини наелектрисан укупним наелектрисањем Q и налази се у ваздуху. Израчунати вектор електричног поља у тачки M са положајем као на слици.



Рјешење: $\mathbf{E}_M = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b^2 - a^2} \hat{\mathbf{i}}$, $b > 0$, $b > a$.

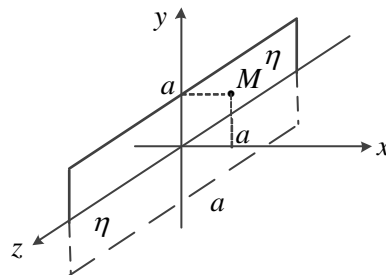
19. Веома танка кружна контура полупречника a равномерно је наелектрисана подужним наелектрисањем τ . Средина је ваздух. Одредити: (а) вектор јачине електричног поља на оси контуре нормалне на раван контуре. (б) максималну вриједност поља, [42].

Рјешење: $\mathbf{E} = \frac{a\tau}{2\epsilon_0} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{i}}_z$, $E_{\max} = \left| E \left(\pm a \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right| = \frac{\tau\sqrt{3}}{9\epsilon_0 a}$.

20. Проводник дужине L равномерно је наелектрисан подужним наелектрисањем τ . На удаљености d од проводника у средишњој равни налази се тачкасто оптерећење Q . Одредити силу којом проводник дјелује на тачкасто наелектрисање, [11].

Резултат: $\mathbf{F} = \frac{\tau Q}{2\pi\epsilon_0 d} \frac{L}{\sqrt{4d^2 + L^2}} \hat{\mathbf{i}}$.

21. Врло дугачка танка равна трака наелектрисана је површинским наелектрисањем $\eta(y) = \eta_0 y/a$, гдје су η_0 и a константне величине. Трака има ширину $2a$ и лежи у yOz равни. Одредити вектор електричног поља у тачки $M(a,a,0)$.



Резултат: $\mathbf{E}(M) = \frac{\eta_0}{2\pi\epsilon_0} \left[(\arctg 2 - \ln \sqrt{5}) \hat{\mathbf{i}} + (\arctg 2 + \ln \sqrt{5} - 2) \hat{\mathbf{j}} \right]$.

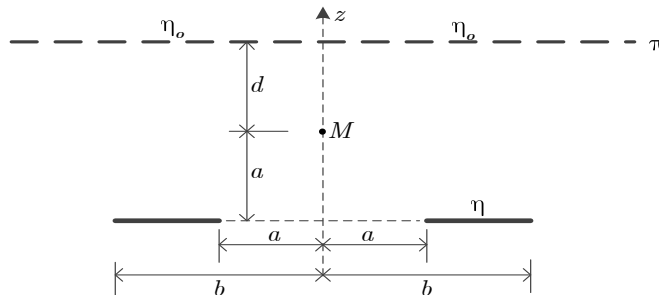
22. Сферна површина наелектрисана је равномерно површинском густином наелектрисања η . Сфера се налази у ваздуху. Одредити вектор јачине електричног поља у тачкама изван и унутар сфере. [15, 42].

Резултат:
$$\mathbf{E}(z) = \frac{\eta a^2}{\epsilon_0 z^2} \hat{\mathbf{k}}, \quad (z > a),$$

$$\mathbf{E}(z) = \frac{-\eta a^2}{\epsilon_0 z^2} \hat{\mathbf{k}}, \quad (z < -a),$$

$$\mathbf{E}(z) = 0, \quad (0 < |z| < a),$$

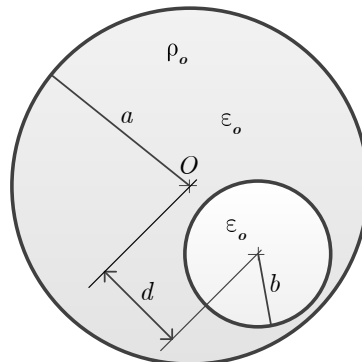
23. Кружни прстен унутрашњег полупречника a и вањског полупречника $b=2a$ наелектрисан је површинском густином наелектрисања η . На растојању a на оси диска налази се тачка M . На растојању d од тачке M , паралелно равни диска, постављена је равна π наелектрисана површинском густином наелектрисања η_0 . Одредити растојање d и површинску густину η_0 тако да сила која дјелује на оптерећење Q у тачки M буде једнака нули.



Резултат: $E = E_\theta, \quad \eta_0 = \eta \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$

Пошто је поље у околини равни π хомогено, растојање d може имати произвољну вриједност.

24. Општи изрази за рачунање потенцијала и потенцијалне разлике?
 25. Написати Гринову функцију за потенцијал усамљеног тачкастог наелектрисања?
 26. Написати изразе за потенцијал у околини линијске, површинске и запреминске расподеле наелектрисања? Написати облике ових израза преко Гринове функције за потенцијал?
 27. Одредити јачину поља чија је потенцијална функција $\varphi = |\mathbf{r}| = r$?
 28. Одредити јачину поља чија је потенцијална функција $\varphi = 1/r$?
 29. Кугла од изолационог материјала диелектричне пропустљивости ϵ_0 и полупречника a у својој унутрашњости има шупљину испуњену ваздухом, полупречника b . Растојање центара кугле је d . Кугла је равномерно наелектрисана запреминском густином наелектрисања ρ_0 . Одредити поље унутар шупљине, [11, 19].

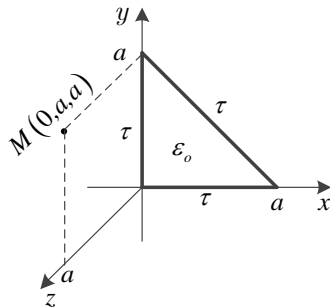


Резултат:
$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \mathbf{d}.$$

30. Осам једнаких тачкастих наелектрисања Q налазе се у ваздуху у тјеменима коцке стране a . Одредити потенцијал у центру коцке ако се референтна тачка налази у тачки $R(a/2, a/2, a/2)$.

$$\varphi_c = Q(4\sqrt{3} - \sqrt{6} - 3\sqrt{2}) / (3\pi\epsilon_0 a).$$

31. Троугаони рам на слици равномерно је наелектрисан подужним наелектрисањем τ . Одредити потенцијал у тачки са координатама $M(0,a,a)$. Средина је ваздух, [42].



Резултат:
$$\varphi_M = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}.$$

32. Нит са униформним подужним наелектрисањем τ лежи на негативном дијелу x -осе, са десним крајем нити у координатном почетку. Дужина нити је a . Одредити потенцијал у тачкама $A(a,0,0)$ и $B(0,a,a)$, узимајући тачку у бесконачности као референтну.

Резултат:
$$\varphi_A = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln 2 + \varphi_0, \quad \varphi_B = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} + \varphi_0.$$

33. Оптерећење Q равномерно је распоређено по танком кружном проводнику полупречника a . Одредити: (а) потенцијал у тачки на оси проводника, (б) поље у тачки на оси проводника, (в) силу која ће дјеловати на тачкасто наелектрисање Q_1 у тачки у којој је одређено поље.

$$\varphi_M = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}, \quad E = E_z = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}}, \quad F = QE = \frac{QQ_1 z}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

34. Поље и потенцијал тачкастог електростатичког дипола?
35. Како гласи израз за потенцијал у околини тачкастог електростатичког дипола ако дипол није у центру сферног координатног система?
36. Извести израз за једначине линија поља за тачкасти електростатички дипол?
37. Поље и потенцијал линијског електростатичког дипола?
38. Како гласи израз за потенцијал у околини линијског електростатичког дипола ако дипол није у центру цилиндричног координатног система?
39. Проводник у електростатичком пољу у вакууму?
40. Електродни системи (једначине преко потенцијалних коефицијената и коефицијената индукције)?
41. Чему су једнаки јачина поља и потенцијал унутар **шупље** металне лопте полупречника a , ако је њено оптерећење једнако Q ?
42. Чему су једнаки јачина поља и потенцијал унутар **пуне** металне лопте полупречника a , ако је њено оптерећење једнако Q ?
43. Како гласи теорема једнозначности и које су њене двије последице од највећег практичног значаја?
44. Теорема лика у равном огледалу (Електростатика)
45. Тачкасто оптерећење налази се на једнаким нормалним растојањима од двије бесконачне проводне полуравни које заклапају угао од 60° . По методи лика у равном огледалу одреди број ликова и скицирај њихов положај.
46. Теорема лика у сферном огледалу (Електростатика)

47. Скицирајте могуће случајеве који се дају ријешити методом лика у сферном огледалу.
48. Дугачак ваздушни вод полупречника a постављен је на висини h ($h \gg a$) изнад површине земље, паралелно њој. Проводник је уземљен и налази се у хомогеном пољу јачине E_0 које је нормално на површ земље и усмјерено ка њој. Одредити: (а) потенцијал у односу на земљу било које тачке у ваздуху, (б) јачину поља на површини земље.

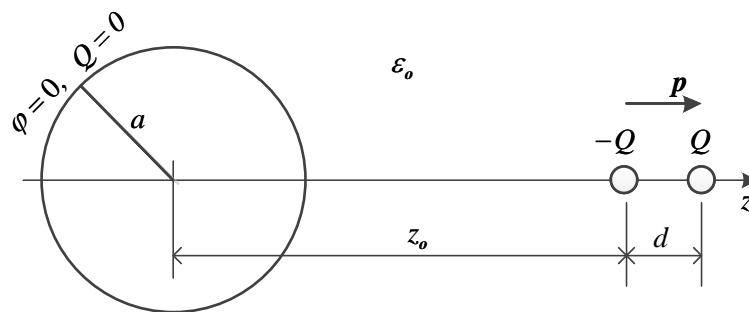
$$(a) \varphi(x, y) = -\frac{E_0 h}{\ln 2h/a} \ln \frac{\sqrt{x^2 + h+y^2}}{\sqrt{x^2 + h-y^2}} + y \cdot E_0$$

$$(b) E_y(0, y) = -E_0 + \frac{hE_0}{\ln 2h/a} \left(\frac{1}{|h+y|} + \frac{1}{|h-y|} \right).$$

49. На растојању d од центра **проводне сфере** полупречника a налази се тачкасто наелектрисање Q . Израчунати рад који је потребно извршити да би се ово наелектрисање удаљило у бесконачност, ако је сфера: (а) уземљена, (б) изолована, тј. одвојена од извора. (в) Одредити пливајући потенцијал сфере.

$$(a) A = \frac{aQ^2}{8\pi\epsilon_0(d^2 - a^2)}, \quad (b) A = \frac{Q^2 a^3}{8\pi\epsilon_0 d^2(d^2 - a^2)}, \quad (v) \varphi_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d}.$$

50. Поред **уземљене неоптерећене** металне лопте налази се тачкасти електростатички дипол диполног момента $p = Qd$. Одредити: (а) функцију потенцијала у произвољној тачки у простору изван лопте. (б) електричну силу на дипол.



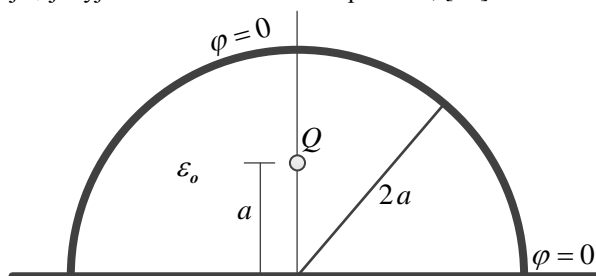
$$\varphi_M = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(z_0+d)z_0} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}} \right) - \frac{a}{(z_0+d)d \sqrt{\left(z - \frac{a^2}{z_0+d}\right)^2 + r^2}} + \frac{a}{z_0 d \sqrt{\left(z - \frac{a^2}{z_0}\right)^2 + r^2}} - \frac{1}{d \sqrt{(z_0-z)^2 + r^2}} + \frac{1}{d \sqrt{(z_0+d-z)^2 + r^2}} \right].$$

$$E(0,0,z_0+d) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{a}{(z_0+d)^3 z_0} - \frac{a(z_0+d)}{(z_0+d)d \left[(z_0+d)^2 - a^2 \right]^2} + \frac{az_0}{z_0 d \left[(z_0+d)z_0 - a^2 \right]^2} - \frac{1}{d^3} \right]$$

$$F = Q[E(0,0,z_0+d) - E(0,0,z_0)].$$

51. Тачкасто наелектрисање Q налази се изнад полусферног проводног испупчења на бесконачној проводној равни на висини h (дуж осе која пролази кроз центар испупчења и која је окомита на раван). Ријешити проблем комбиновањем метода лика у равном и сферном огледалу.
52. Ваздушна шупљина облика полулопте полупречника $2a$ налази се унутар идеално проводног материјала врло великих димензија, који је доведен на нулти потенцијал. На оси полулопте у њеној

унутрашњости на растојању a од центра налази се тачкасто оптерећење Q . Одредити вектор електростатичке силе која дјелује на тачкасто наелектрисање, [23].



$$\mathbf{F} = Q \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0(4a-a)^2} (-\hat{\mathbf{k}}) + \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0(2a)^2} \hat{\mathbf{k}} + \frac{-Q_1}{4\pi\epsilon_0(5a)^2} \hat{\mathbf{k}} \right)$$

53. Објасните поље паралелних бесконачних електричних оса наелектрисаних са подужним наелектрисањима τ и $-\tau$?
54. Скицирати случајеве који се могу ријешити помоћу поља еквивалентних оса?
55. Анализирајте поље два бесконачно дуга паралелна цилиндрична проводна некоаксијална плашта на потенцијалима ϕ_1 и ϕ_2 . (Случај: плашт „2“ обухвата плашт „1“ са растојањем геометријских оса d . Полупречници плаштева „1“ и „2“ су a и b , респективно.)
56. Анализирајте поље два бесконачно дуга паралелна цилиндрична проводна некоаксијална плашта на потенцијалима ϕ_1 и ϕ_2 . (Случај: растојање геометријских оса $d > a, b, a+b$, гдје су a и b полупречници плаштева „1“ и „2“, респективно)
57. За случај два паралелна веома дуга **некоаксијална** цилиндрична плашта полупречника a и b , смјештена **један поред другог**, позната су наелектрисања еквивалентних електричних оса $\pm\tau$, размак оса $2c$ и растојања центара кружница s_1 и s_2 од y -осе која се налази на средини између еквивалентних оса. Одредити функцију површинске густине наелектрисања проводног плашта полупречника a .

$$\eta_1 = \frac{\tau}{2\pi} \left[\frac{a + s_1 - c \cos\theta}{\left[a^2 + s_1 - c^2 + 2a s_1 - c \cos\theta \right]} - \frac{a + s_1 + c \cos\theta}{\left[a^2 + s_1 + c^2 + 2a s_1 + c \cos\theta \right]} \right]$$

58. За случај два паралелна веома дуга **некоаксијална** цилиндрична плашта полупречника a и b , смјештена **један у другом**, позната су наелектрисања еквивалентних електричних оса $\pm\tau$, размак оса $2c$ и растојања центара кружница s_1 и s_2 од y -осе која се налази на средини између еквивалентних оса. Одредити функцију површинске густине наелектрисања проводног плашта полупречника a .

$$\eta_1 = \frac{\tau}{2\pi} \left[\frac{a + s_1 - c \cos\theta}{\left[a^2 + s_1 - c^2 + 2a s_1 - c \cos\theta \right]} - \frac{a + s_1 + c \cos\theta}{\left[a^2 + s_1 + c^2 + 2a s_1 + c \cos\theta \right]} \right]$$

59. За случај два паралелна веома дуга **некоаксијална** цилиндрична плашта полупречника a и b , смјештена **један поред другог**, позната су наелектрисања еквивалентних електричних оса $\pm\tau$, размак оса $2c$ и растојања центара кружница s_1 и s_2 од y -осе која се налази на средини између еквивалентних оса. Одредити функцију површинске густине наелектрисања проводног плашта полупречника b .

$$\eta_2 = \frac{\tau}{2\pi} \left[\frac{b + s_2 + c \cos\theta}{\left[b^2 + s_2 + c^2 + 2b s_2 + c \cos\theta \right]} - \frac{b + s_2 - c \cos\theta}{\left[b^2 + s_2 - c^2 + 2b s_2 - c \cos\theta \right]} \right]$$

60. За случај два паралелна веома дуга **некоаксијална** цилиндрична плашта полупречника a и b , смјештена **један у другом**, позната су наелектрисања еквивалентних електричних оса $\pm\tau$, размак оса $2c$ и растојања центара кружница s_1 и s_2 од y -осе која се налази на средини између еквивалентних оса. Одредити функцију површинске густине наелектрисања проводног плашта

полупречника a .

$$\eta_2 = \frac{\tau}{2\pi} \left[\frac{b + s_2 - c \cos\theta}{b^2 + s_2 - c^2 + 2b s_2 - c \cos\theta} - \frac{b + s_2 + c \cos\theta}{b^2 + s_2 + c^2 + 2b s_2 + c \cos\theta} \right]$$

61. Теорема лика у цилиндричном огледалу (Електростатика).
62. Унутар дугог **неоптерећеног** металног цилиндричног плашта **на потенцијалу нула**, унутрашњег и вањског полупречника a и b , налази се дуга наелектрисана нит подужног наелектрисуња τ , паралелна оси цилиндра и удаљена од његовог центра за $d=a/2$. Одредити потенцијал и вектор електричног поља: (а) унутар шупљине цилиндра, (б) у зиду цилиндра, (в) у вањској области цилиндра.

$$(а) \varphi(x, y) = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{y^2 + (2a-x)^2}{4y^2 + (2x-a)^2}, \quad 0 \leq r \leq a.$$

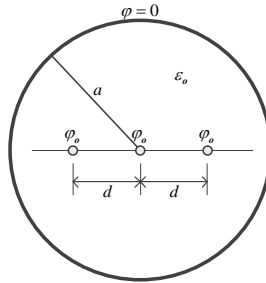
$$E_x(x, y) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{D-x}{r_2^2} + \frac{x-d}{r_1^2} \right) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{2a-x}{y^2 + (2a-x)^2} + \frac{2(2x-a)}{4y^2 + (2x-a)^2} \right],$$

$$E_y(x, y) = \frac{\tau y}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = \frac{\tau y}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{4}{4y^2 + (2x-a)^2} - \frac{1}{y^2 + (2a-x)^2} \right].$$

$$(б) \mathbf{E} = 0, \quad \varphi = 0, .$$

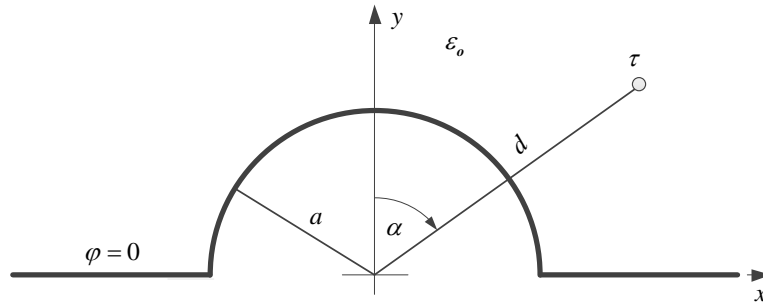
$$(в) E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

63. Посматра се оклопљени трожиљни вод попречног пресека као на слици. Водови су полупречника b , ($b \ll a, d, a-d$). Проводници вода доведени су на потенцијал φ_0 , а оклоп је на нултом потенцијалу. Извести израз за функцију потенцијала у произвољној тачки у ваздуху, а затим извести изразе из којих је могуће одредити подужна наелектрисуња проводника, [23].



$$\tau_1 = \frac{2\pi\epsilon_0\varphi_0 \ln \frac{b}{d}}{\ln \frac{b}{d} \ln \frac{a^2}{d^2} + \ln \frac{a}{b} \ln \frac{2a^4b}{d(a^4-d^4)}}, \quad \tau_0 = \frac{2\pi\epsilon_0\varphi_0 \ln \frac{b}{a} \ln \frac{2a^4b}{d(a^4-d^4)}}{\left[\ln \frac{b}{d} \ln \frac{a^2}{d^2} + \ln \frac{a}{b} \ln \frac{2a^4b}{d(a^4-d^4)} \right] \ln \frac{b}{d}}.$$

64. На неограниченој проводној равни нултог потенцијала налази се полуцилиндрична избочина полупречника a . Извести изразе за компоненте поља ако је бесконачно дуги линијски проводник подужног наелектрисуња τ постављен као на слици, [23].



$$E_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{r-d \cdot \sin(\alpha+\theta)}{r_1^2} - \frac{r-d \cdot \sin(\alpha-\theta)}{r_2^2} - \frac{r-D \cdot \sin(\alpha+\theta)}{r_3^2} + \frac{r-D \cdot \sin(\alpha-\theta)}{r_4^2} \right) \quad E_\theta = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(-\frac{d \cdot \cos(\alpha+\theta)}{r_1^2} - \frac{d \cdot \cos(\alpha-\theta)}{r_2^2} + \frac{D \cdot \cos(\alpha+\theta)}{r_3^2} + \frac{D \cdot \cos(\alpha-\theta)}{r_4^2} \right)$$

65. Како називамо материјалне средине које су активне у електричном пољу?
66. Када кажемо, у општем случају, да је материјална средина хомогена? Када је средина хомогена у магнетском погледу?
67. Када кажемо, у општем случају, да је материјална средина линеарна?
68. Шта су фероелектрици или електрити?
69. Када, у општем случају, кажемо да је материјална средина изотропна?
70. Објаснити које материјале називамо нехомогеним, које нелинеарним, а које анизотропним?
71. Коју поларизацију називамо електронском и код којих материјала се јавља?
72. Коју поларизацију називамо диполном и код којих материјала се јавља?
73. Коју поларизацију називамо јонском?
74. Од чега зависи густина везаних наелектрисања? Изведите израз за рачунање густине везаних запреминских наелектрисања ако се познаје густина слободних запреминских наелектрисања.
75. Објасните разлику између диелектрика и изолатора?
76. Гаусов закон за поља вектора \mathbf{E} , \mathbf{D} и \mathbf{P} ?
77. Густине везаних наелектрисања и поље у диелектрику.
78. Једначине електростатичког поља за материјалну средину.
79. Чему је једнак флуks вектора електричне индукције кроз затворену површину, ако се унутар те површине налазе три позитивна и једно негативно тачкасто наелектрисање, ако је апсолутна вриједност свих наелектрисања Q ?
80. Чему је једнака дивергенција вектора електричне индукције у тачкама простора у којима постоји поље, али нема слободних оптерећења?
81. Чему је једнак ротор вектора јачине електростатичког поља?
82. Конвенција за нормалу на граници двије средине (диелектрик-диелектрик, проводник – диелектрик и диелектрик – вакуум)?
83. Како се понашају компоненте вектора јачине поља и вектора електричне индукције при преласку из једног диелектрика у други?
84. Гранични услови у електростатичком пољу (скаларни, векторски и облик преко потенцијала)?
85. Закон преламања у електростатичком пољу?
86. На основу закона преламања у електростатичком пољу анализирајте случај када је $\alpha_1=0$. Колики је тада α_2 ? Зашто? Скицирајте за тај случај линије поља вектора \mathbf{E} и \mathbf{D} ако је $\epsilon_1=2\epsilon_2$.

87. Објасните модификовану теорему лика у равном огледалу (Електростатика).
88. Како се рјешава задатак модификованом теоремом лика у равном огледалу у случају када се тачкасто наелектрисање Q налази у средини (2)?
89. Како се рачуна потенцијал у тачки M која се налази у диелектрику диелектричне константе ϵ_2 методом модификоване теореме лика у равном огледалу за случај када се тачкасто наелектрисање Q налази у средини (2)?
90. Како се рачуна потенцијал у тачки M која се налази у диелектрику диелектричне константе ϵ_1 методом модификоване теореме лика у равном огледалу за случај када се тачкасто наелектрисање Q налази у средини (2)?
91. Како се рјешава задатак модификованом теоремом лика у равном огледалу за случај када се тачкасто наелектрисање Q налази у средини (1)?
92. Како се рачуна потенцијал у тачки M која се налази у диелектрику диелектричне константе ϵ_1 методом модификоване теореме лика у равном огледалу за случај када се тачкасто наелектрисање Q налази у средини (2)?
93. Како се рачуна потенцијал у тачки M која се налази у диелектрику диелектричне константе ϵ_1 методом модификоване теореме лика у равном огледалу за случај када се тачкасто наелектрисање Q налази у средини (1)?
94. Објасните појам капацитивности и напишите изразе за рачунање капацитивности плочастог кондензатора, усамљене кугле, сферног и цилиндричног кондензатора, подужне капацитивности усамљеног проводника изнад проводне равни, коаксијалног кабла и двојичног вода.

95. Објаснити сопствене и међусобне капацитивности.

96. За два дуга наелектрисана проводника са подужним наелектрисањима τ_1 и τ_2 над површином земље написати једначине са потенцијалним коефицијентима, једначине са коефицијентима индукције, те једначине преко парцијалних капацитивности. Претпостављајући да овај вод напаја неуземљени извор, одредити израз за радну капацитивност вода и енергију електричног поља вода.

$$C' = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{d}{a\sqrt{1 + d/2h^2}}}. \quad W_e = \frac{C_{\text{радно}} U^2}{2}.$$

97. Извести израз за капацитивност проводника трофазног симетрираног вода над површином земље.

98. Одредити подужну капацитивност цилиндричног проводника полупречника a постављеног изнад површине земље. Геометријска оса цилиндра је на висини h изнад површине земље. **Ефекат близине може се занемарити, ($h \gg a$).**

$$C' = \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{a}}.$$

99. Одредити подужну капацитивност система два некоаксијална проводна цилиндра полупречника a и b . Растојање геометријских оса цилиндара је d , при чему је $d > a+b$.

$$C' = \frac{\tau}{|\varphi_A - \varphi_B|} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{(x_1+c)(x_2+c)}{ab}}.$$

100. Одредити подужну капацитивност система два некоаксијална проводна цилиндра полупречника a и b , $a < b$. Цилиндар полупречника b обухвата цилиндар полупречника a . Растојање геометријских оса цилиндара је d .

$$C' = \frac{\tau}{|\varphi_A - \varphi_B|} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{(x_1+c)(x_2-c)}{ab}}.$$

101. Одредити подужну капацитивност коаксијалног кабла. Полупречник унутрашњег проводника је a ,

а унутрашњи полупречник вањског плашта b .

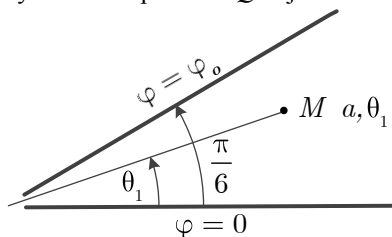
$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}.$$

- 102 Енергија електростатичког поља?
- 103 Из које двије диференцијалне једначине изводимо Пуасонову једначину?
- 104 Пуасонова и Лапласова једначина у Електростатици.
- 105 Одредити рјешења Пуасонове једначине у електростатици у случајевима када је проблем једнодимензионалан и одговара му цилиндрични координатни систем.
- 106 Одредити рјешења Пуасонове једначине у електростатици у случајевима када је проблем једнодимензионалан и одговара му правоугли координатни систем.
- 107 Одредити рјешења Пуасонове једначине у електростатици у случајевима када је проблем једнодимензионалан и одговара му сферни координатни систем.
- 108 У коаксијалном каблу услед прегријавања створио се ваздушни **цилиндрични зазор** полупречника b у којем се јонизацијом створило наелектрисање запреминске густине ρ . Централни проводник је на потенцијалу φ_0 , а плашт кабла је уземљен. Полазећи од Лапласове и Пуасонове једначине одредити функције потенцијала, електрично поље и подужне површинске густине наелектрисања у областима (a,b) и (b,c) . Диелектричне константе у зонама (a,b) и (b,c) су ϵ_1 и ϵ_2 , респективно.
- 109 Двије проводне неограничене полуравни сијеку се под углом α_0 , али се не додирују. Једна од равни је на потенцијалу нула, а друга на потенцијалу φ_0 . Полазећи од Лапласове једначине одредити поље и потенцијал у простору између проводних плоча.
- 110 Сфера полупречника a наелектрисана је запремином густином наелектрисања ρ , диелектричне пропустљивости ϵ_1 налази се унутар диелектричне сферне љуске полупречника a и b , ($a < b$) пропустљивости ϵ_2 . Околни простор је ваздух. Полазећи од Пуасонове и Лапласове једначине одредити функције потенцијала у свим областима простора.

$$\varphi_1(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_1} + \frac{\rho a^3}{3} \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_0 \epsilon_2 \cdot b} + \frac{2\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\epsilon_1 \epsilon_2 \cdot a} \right), \quad r \leq a,$$

$$\varphi_2(r) = \frac{\rho a^3}{3} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_2 \cdot r} + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_0 \epsilon_2 \cdot b} \right), \quad a \leq r \leq b, \quad \varphi_3(r) = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 \cdot r}, \quad r \geq b.$$

- 111 Дате су двије металне плоче бесконачних димензија које међу собом образују угао $\pi/6$ али се при том не сијеку. Познати су потенцијали плоча овако формираног кондензатора. Одредити силу на пунктуално оптерећење Q које се налази у тачки $M(a, \theta_1)$.



$$\mathbf{F} = -\frac{6\varphi_0 Q}{a\pi} \hat{\mathbf{i}}_\theta.$$

- 112 Одредити функцију расподеле потенцијала у бесконачно дугом жлијебу право-угаоног попречног пресека. Стране жлијеба су на различитим потенцијалима, као на слици. [23]

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\varphi_0}{2k-1 \pi \cdot \operatorname{sh} \left[\frac{2k-1 \pi}{2a} b \right]} \cdot \sin \left[\frac{2k-1 \pi}{a} x \right] \cdot \operatorname{sh} \left[\frac{2k-1 \pi}{a} y \right].$$

- 113 Интеграцијом Лапласове једначине одредити потенцијал у међуелектродном простору планпаралелног система као на слици. [23]

$$\varphi(r, \theta) = \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 2n+1 \theta}{2n+1 \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{2n+1} - \left(\frac{a}{b} \right)^{2n+1} \right]} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{r}{a} \right)^{2n+1} + \left(\frac{r}{b} \right)^{2n+1} \\ - \left(\frac{a}{r} \right)^{2n+1} - \left(\frac{b}{r} \right)^{2n+1} \end{array} \right].$$

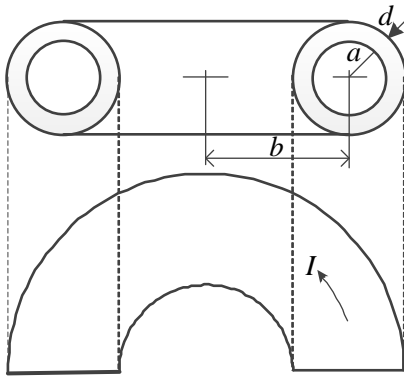
- 114 Диракова функција у електростатици.
115 Интегрални облик Пуасонове једначине

3.15. Питања и задаци за самостални рад

1. Шта је стационарно струјно поље?
2. Зашто можемо занемарити магнетско поље које прати стационарну струју и поље третирати као стационарно струјно поље?
3. Објасните физикални смисао густине наелектрисања у стационарним струјним пољима.
4. Наведите особине електричне струје и густина струје.
5. Објаснити зашто површине проводника у стационарним струјним пољима не могу бити еквипотенцијалне?
6. Каква је расподела наелектрисања на површинама проводних тијела кроз које теку стационарне струје?
7. Којим макроскопским величинама квалитативно описујемо струјно поље?
8. Шта је јачина струје, а шта густина струје у струјним пољима?
9. Објаснити једначину континуитета. Навести интегрални и диференцијални облик једначине за општи и стационарни случај.
10. Једначина континуитета у струјним пољима представља математичку интерпетацију једнога закона?

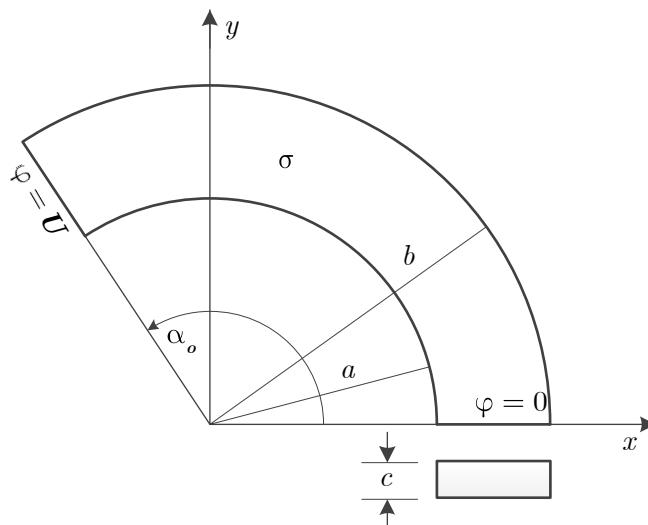
Кога?

11. Које од следећих електричних величина су скаларне, а које векторске: струја, потенцијал, напон, јачина електричног поља, градијент потенцијала, густина струје?
12. Како се може написати Омов закон у диференцијалном облику ако је познат специфични отпор умјесто специфичне проводности?
13. Омов закон у интегралном и диференцијалном облику?
14. Џулов закон у интегралном и диференцијалном облику?
15. Шта називамо запреминском густином снаге?
16. Шта називамо отпорником?
17. Како се рачуна отпор отпорника за случај хомогеног проводника константног попречног пресека, познате дужине и специфичне отпорности и у којем је расподјела густине струје по пресеку константна?
18. Како рачунамо отпор проводника код кога расподјела струје по пресеку проводника није константна? Чиме је условљен овај прорачун?
19. Одредити отпор шупљег проводника торусног облика кружног попречног пресека специфичне проводности материјала σ .



$$R = \frac{1}{G} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2ad\sigma}$$

20. Електроде сферног кондензатора прикључене су на напон U . Полупречници електрода су a и b , ($a < b$). Специфична проводност диелектрика је σ . Одредити отпор диелектрика.
Резултат: $R = \frac{b-a}{4\pi\sigma ab}$.
21. Проводна трака специфичне проводности σ , димензија као на слици, прикључена је на напон U . Одредити: (а) Отпорност траке, (б) Џулове губитке у траци.



$$(a) \quad R = \frac{U}{I} = \frac{\alpha_o}{\sigma \delta \cdot \ln b/a}. \quad (b) \quad P = RI^2 = UI = \frac{\sigma \delta U^2}{\alpha_o} \ln \frac{b}{a}.$$

22. Наведите и објасните Кирхофове законе у диференцијалном облику.

23. Шта је тачкасти струјни извор?

24. Простор између проводника коаксијалног кабла испуњен је изолацијом којој се специфична проводност мијења са координатом r , $\sigma = \sigma_o(1+a/r)$. Полупречници унутрашњег проводника и унутрашњи полупречник спољашњег проводника су a и b . Дужина кабла је l , а прикључени напон U . (а) Одредити струју одводности. (б) Колико се промијенио отпор изолације у односу на случај када је специфична проводност константна σ_o ?

$$(a) \quad I = \frac{2\pi l \sigma_o U}{\ln \left[\frac{a+b}{2a} \right]}. \quad (b) \quad \Delta R = R_1 - R_o = \frac{1}{2\pi \sigma_o l} \ln \frac{a+b}{2b}.$$

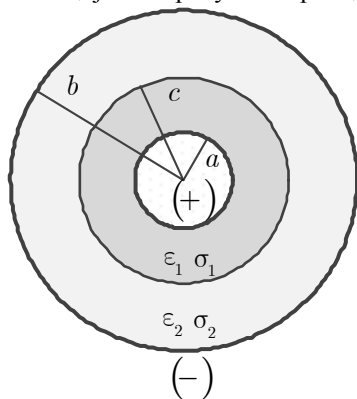
25. Једначине електричног поља стационарних струја

26. Гранични услови и закон преламања у стационарном струјном пољу.

27. Шупља лопта полупречника a налази се у хомогеном материјалу специфичне проводности σ . Одредити израз за густину струје и провјерити релације $\text{div} \mathbf{J} = 0$ и $\text{rot} \mathbf{E} = 0$, [11].

$$\mathbf{J} = J_r \cdot \hat{\mathbf{i}}_r = I \hat{\mathbf{i}}_r / (4\pi r^2).$$

28. Диелектрик у **коаксијалном каблу** састоји се од два цилиндрична коаксијална слоја. Специфичне проводности слојева нису једнаке нули, већ малим, али коначним вриједностима σ_1 и σ_2 . Полупречник унутрашњег проводника кабла је a , спољашњег b , а раздвојеног цилиндра слојева изолације c . Израчунати проводност између проводника кабла по јединици његове дужине.



$$G' = \frac{2\pi}{\frac{1}{\sigma_1} \ln \frac{c}{a} + \frac{1}{\sigma_2} \ln \frac{b}{c}} = \frac{2\pi}{\ln \left[\left(\frac{c}{a} \right)^{\frac{1}{\sigma_1}} \left(\frac{b}{c} \right)^{\frac{1}{\sigma_2}} \right]}.$$

29. Плочасти кондензатор кружних плоча, на међусобном растојању d , има двослојни диелектрик карактеристика (ϵ_1, σ_1) и (ϵ_2, σ_2) , као на слици. Струја кроз кондензатор је I . Одредити укупну површинску густину наелектрисања на плочама кондензатора занемарујући ивични ефекат.

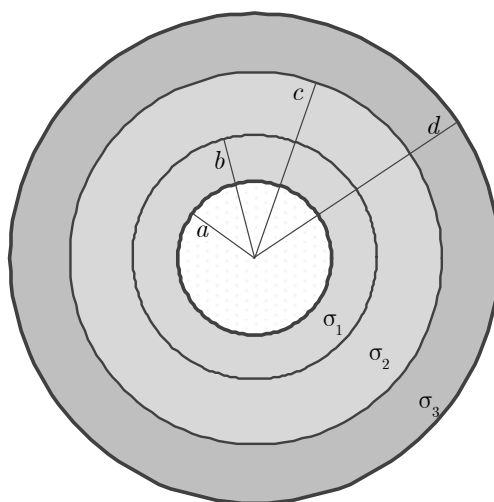
$$\eta = \eta_s + \eta_v = 2\epsilon_o E = 4\epsilon_o I / \left[a^2 \pi (\sigma_1 + \sigma_2) \right].$$

30. Објаснити дуалност струјног и електростатичког поља.

31. Теорема ликова у стационарном струјном пољу.

32. На примјеру бесконачно дугог коаксијалног кабла са савршеним диелектриком на напону U , објаснити поље проводника у **савршеном** диелектрику.

33. Диелектрик коаксијалног кабла састоји се од три коаксијална слоја. Први слој има специфичну проводност σ_1 , други $\sigma_2 = \sigma_1/3$ и трећи $\sigma_3 = \sigma_1$. Полупречници проводника и слојева су $a < b < c < d$. Израчунати подужну проводност између проводника кабла.



$$G' = \frac{I'}{U} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\sigma_1} \ln \frac{b}{a} + \frac{k}{\sigma_1} \ln \frac{c}{b} + \frac{1}{\sigma_1} \ln \frac{d}{c}} = \frac{2\pi\sigma_1}{\ln \frac{b}{a} + 3 \cdot \ln \frac{c}{b} + \ln \frac{d}{c}} = \frac{2\pi\sigma_1}{\ln \frac{d c^2}{a b^2}}$$

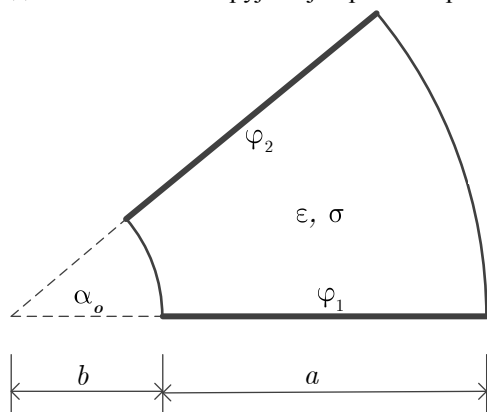
34. Објаснити шта су уземљивачи и врсте уземљења.
35. Плочасти кондензатор има несавршен диелектрик. Ако је напон на кондензатору U и растојање плоча d , одредити интензитет вектора електричног поља, електричну индукцију и запреминску густину слободног наелектрисања у следећим случајевима: (а) $\epsilon = c$ и $\sigma(x) = \sigma_o/(1-\alpha x)$, (б) $\epsilon(x) = c/(1-\alpha x)$, $\sigma(x) = \sigma_o/(1-\alpha x)$. (Величине σ_o , c и α су константе.) Координатни почетак је на лијевој плочи кондензатора.

$$(a) J = \frac{2\sigma_o U}{d(2-\alpha d)}, E(x) = \frac{2(1-\alpha x)U}{d(2-\alpha d)}, D(x) = \epsilon_o c E(x) = \frac{2\epsilon_o c(1-\alpha x)U}{d(2-\alpha d)}$$

$$\rho = \text{div} \mathbf{D}(x) = \frac{\partial D_x}{\partial x} = -\frac{2\epsilon_o U \alpha c}{(2-\alpha d)d}$$

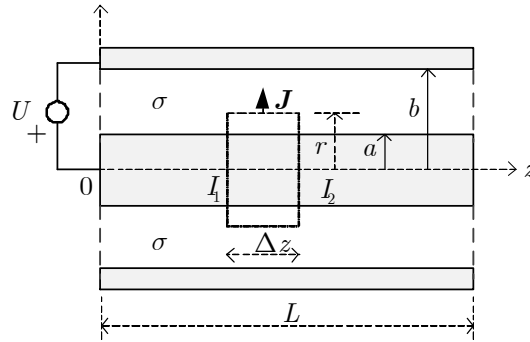
$$(b) E(x) = \frac{2(1-\alpha x)U}{d(2-\alpha d)}, D(x) = \epsilon_o \frac{c}{1-\alpha x} E(x) = \frac{2\epsilon_o c U}{d(2-\alpha d)}, \rho = \text{div} \mathbf{D} = 0$$

36. Сферни уземљивач у неограниченом хомогеном тлу.
37. Танки штапни уземљивач у неограниченом тлу.
38. Диелектрик између косо постављених плоча кондензатора није идеалан, него посједује коначну специфичну проводност σ . Плоче су квадратног облика страница a . Потенцијали плоча су φ_1 и φ_2 . Одредити интензитет струје која протиче кроз кондензатор. Ивични ефекат занемарити.

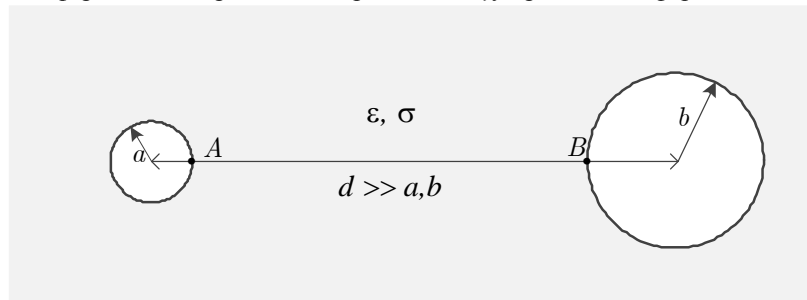


$$I = \frac{a \cdot \sigma (\varphi_1 - \varphi_2)}{\alpha_o} \ln \frac{a+b}{b}$$

39. На примјеру неоптерећеног коаксијалног кабла дужине L са несавршеним диелектриком на напону U , објаснити поље проводника у **несавршеном** диелектрику.

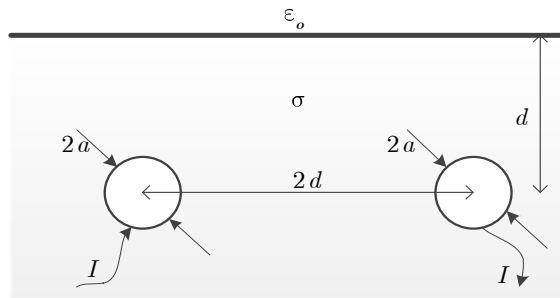


40. Двије савршено проводне сфере укопане су дубоко у хомогену земљу проводности σ и диелектричне константе ϵ . Растојање између центара сфера је веома велико у поређењу са полупречницима сфера a и b . Одредити отпорност између проводних сфера.



$$R = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2d - a - b}{d - a} \frac{1}{d - b} \right) \approx \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d} \right).$$

41. Двије савршено проводне сферне електроде полупречника a укопане су у земљу на дубину d и на међусобном растојању $2d$. Сматрати $d \gg a$. Једној електроди доводи се струја I . Иста струја се одводи са друге електроде. Околну земљу сматрати хомогеном и линеарном проводности σ . Одредити еквивалентну отпорност између електрода.



$$R = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{I} = \frac{2\varphi_A}{I} \approx \frac{1}{2\pi\sigma} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{2d\sqrt{2}} \right] = \frac{2d\sqrt{2} - a}{4\pi\sigma ad\sqrt{2}} = \frac{4d - a\sqrt{2}}{8\pi\sigma ad}.$$

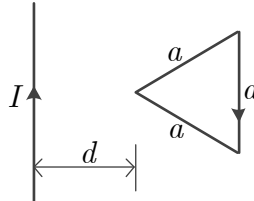
4.11. Питања и задаци за самостални рад

1. Објаснити како помоћу Амперове силе одређујемо вектор магнетске индукције.
2. Упоредити електричну и магнетску силу.
3. Колика је резултантна Амперова сила на контуру са струјом у хомогеном магнетском пољу?
3. Како гласи израз за силу $d\mathbf{F}_{12}$ којом елемент $d\mathbf{l}_1$ са струјом I_1 дјелује на елемент $d\mathbf{l}_2$ са струјом I_2 ?
4. На примјеру два паралелна струјна елемента $I d\mathbf{l}_1$ и $I d\mathbf{l}_2$ који леже у истој равни и паралелни су

један другом, показати да за магнетске силе не важи закон акције и реакције.

5. Написати израз за Лоренцову силу? Објаснити оба сабирка овог израза.
6. Написати једначине стационарног магнетског поља у интегралном и диференцијалном облику? Како гласе закони које те једначине представљају?
7. Коју способност материјалне средине изражава релативна магнетска пермеабилност? Коју вриједност ове пермеабилности имају феромагнетици, дијамагнетици и парамагнетици? Који од ових материјала појачавају поље када се у њега унесу?
8. Интегрални и диференцијални облик једначина магнетостатичког поља у вакууму?
9. Упоредите електростатичко и магнетостатичко поље по питању вртложности и изворности?
10. Напишите израз за густину енергије магнетског поља?
11. Објасните магнетски скалар-потенцијал и услове под којим је изведен?
12. Извести Лапласову једначину за магнетски вектор-потенцијал и написати њено опште рјешење.
13. Особине магнетског вектор-потенцијала (смјер и правац вектора \mathbf{A} , одређивање магнетског флукса преко вектора \mathbf{A} , рачунање укупне и узајамне енергије магнетског поља преко \mathbf{A} , ...)
14. Изрази за рачунање магнетског вектор-потенцијала у случајевима: тачкасто наелектрисање које се креће брзином \mathbf{v} , линијски проводник са стационарном струјом I и површинска расподела стационарних струја.
15. Извести Био–Саваров закон. Написати облике за: тачкасто наелектрисање које се креће брзином \mathbf{v} , линијски проводник са струјом I и површинске струје.
16. Гранични услови и закон преламања за магнетостатичко поље.
17. Одредити магнетски флукс струје I праволинијског бесконачно дугог проводника кроз правоугаону контуру страница a и b . Страна a правоугаоника паралелна је бесконачно дугом проводнику. Проводник и контура леже у истој равни и на међусобном су растојању d .

$$\Phi = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \ln \frac{d+b}{d}.$$
18. Теорема lika у равном феромагнетском огледалу.
19. Теорема lika у цилиндричном феромагнетском огледалу.
20. Модификована теорема lika у равном феромагнетском огледалу.
21. Поље танког кружног завојка полупречника a , са стационарном струјом I .
22. Одредити магнетски флукс струје I која протиче кроз праволинијски бесконачно дуги проводник кроз истострану троугаону контуру постављену као на слици. Проводник и контура леже у истој равни и на међусобном су растојању d .



$$\Phi = \frac{\mu_0 \sqrt{3} I}{3\pi} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} a - d \ln \frac{2d + a\sqrt{3}}{2d} \right].$$

23. Полазећи од диференцијалне једначине за магнетски вектор-потенцијал одредити вектор потенцијал \mathbf{A} дугачког цилиндричног проводника полупречника a , кроз који протиче струја густине $\mathbf{J} = J \cdot \mathbf{i}_z$. Након овога одредити и вектор магнетске индукције.

$$B_\theta = -\frac{dA_z}{dr} = \begin{cases} \frac{\mu_0 J r}{2}, & r \leq a, \\ \frac{\mu_0 J a^2}{2r}, & r \geq a \end{cases} \quad A_z = \begin{cases} -\frac{\mu_0 J r^2}{4}, & r \leq a, \\ -\frac{\mu_0 J a^2}{2} \ln r, & r \geq a. \end{cases}$$

24. Кроз прав танак праволинијски проводник дужине $2L$ у ваздуху протиче стационарна струја I . Одредити вектор магнетске индукције \mathbf{B} у произвољној тачки која лежи у симетралној равни на растојању r проводника: (а) преко магнетског вектор потенцијала, (б) преко Био-Саваровог закона.

$$(a) \quad \mathbf{B}(r) = B_0 \hat{\mathbf{i}}_0 = \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + 4r^2}} \hat{\mathbf{i}}_0. \quad (b) \quad \mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + 4r^2}} \hat{\mathbf{i}}_0.$$

25. Одредити магнетски вектор потенцијал A у произвољној тачки у околини два паралелна неограничено дуга цилиндрична проводника кружног пресека полупречника a , међусобног растојања $2d$. Кроз проводнике протичу струје истог интензитета а супротних смјерова.

$$A_z = \mu_0 \frac{I}{4\pi} \ln \frac{x^2 + (y-d)^2}{x^2 + (y+d)^2}. \quad A(M) = A_z \hat{\mathbf{i}}_z.$$

26. Наелектрисана честица наелектрисања Q креће се у вакууму константном брзином v у хомогеном магнетском пољу \mathbf{B}_0 нормално на поље. Колико треба бити хомогено електрично поље па да се честица под дејством електричне и магнетске силе креће праволинијски?

27. Магнетско поље стационарних струја задовољава закон о конзервацији вектора магнетске индукције. Показати да ова законитост важи на примјеру праволинијског проводника кроз који протиче струја I .

28. Показати да поље векторског потенцијала магнетског поља треба третирати као поље векторске функције без извора, односно да његову изворну компоненту можемо занемарити.

29. Доказати да је векторски потенцијал магнетског поља стационарних струја густине \mathbf{J} у хомогеним магнетским срединама оређен рјешењем Пуасонове диференцијалне једначине облика:

$$\Delta A(\mathbf{r}) = -\frac{\mu}{4\pi v} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

30. У врло дугачком шупљем **цилиндричном** бакарном проводнику постоји стационарна струја I . Полупречници проводника су a и b ($a < b$), а средина је свуда немагнетска. Одредити магнетску индукцију \mathbf{B} у тачки на растојању r , ($0 \leq r \leq \infty$), од осе проводника.

$$B(r) = 0, \text{ за } r \leq a, \quad B(r) = \frac{\mu_0 I \cdot (r^2 - a^2)}{2\pi r \cdot (b^2 - a^2)}, \text{ за } a \leq r \leq b,$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \text{ за } r \geq b.$$

31. Кроз праволинијски проводник, који је усмјерен у правцу z -осе, протиче једносмјерна струја I , при чему је z -оса заједничка ивица три полуравни које образују углове θ_1 , θ_2 и θ_3 (збир углова 2π). Ако је простор између овако постављених полуравни испуњен хомогеним материјалом магнетских пермеабилности μ_1 , μ_2 и μ_3 , одредити јачине магнетских поља \mathbf{H} у сва три ова простора.

$$H_i = \frac{I \cdot \mu_1 \mu_2 \mu_3}{\mu_i \cdot r \cdot (\theta_1 \mu_2 \mu_3 + \theta_2 \mu_1 \mu_3 + \theta_3 \mu_1 \mu_2)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

32. Одредити поље магнетске индукције \mathbf{B} унутар и око коаксијалног кабла чији су проводници од бакра са стационарном струјом I . Полупречници проводника и плашта кабла су: a , b и c , ($a < b < c$). У свим срединама пермеабилност је једнака μ_0 .

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I \cdot r}{2\pi a^2}, & 0 \leq r \leq a, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & a \leq r \leq b, \\ \frac{\mu_0 I (c^2 - r^2)}{2\pi (c^2 - b^2) r}, & b \leq r \leq c, \\ 0, & r \geq c. \end{cases}$$

33. Струјни елемент $I d\mathbf{l}$ смјештен је у координатни почетак. Струја има смјер z -осе. Колике су

компоненте поља dB_x , dB_y и dB_z у произвољној тачки $A(x,y,z)$?

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-y \cdot I dl}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad dB_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x \cdot I dl}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad dB_z = 0.$$

34. У квадратној жичаној контури странице a постоји стационарна струја I . Контура се налази у вакууму. Одредити израз за вектор магнетске индукције \mathbf{B} у произвољној тачки на правој која је нормална на раван контуре и пролази кроз центар контуре.

$$\mathbf{B}(z) = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 a^2 I}{\pi \left[(4z^2 + a^2)\sqrt{2z^2 + a^2} \right]} \hat{\mathbf{i}}_z.$$

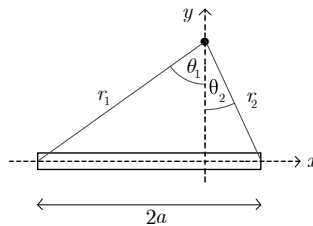
35. Дат је линијски проводник који слиједи дио кружнице полупречника a , осим на дијелу који одговара централном углу 2α , гдје је проводник праволинијски и иде дуж одговарајуће тетиве. Одредити вектор магнетске индукције у центру кружнице ако кроз проводник протиче временски константна струја интензитета I .

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (\operatorname{tg}\alpha + \pi - \alpha) \hat{\mathbf{i}}_z.$$

36. Израчунати вектор магнетске индукције у тачки која се налази у равни квадратне контуре од танке жице, странице a . Контура је у ваздуху са стационарном струјом I . Тачка има координате $M(0,25a,0,5a)$.

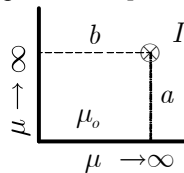
$$\mathbf{B} = 1,38 \frac{I}{a} \hat{\mathbf{i}}_z.$$

37. Кроз праву, врло танку, бесконачно дугу, проводну траку ширине $2a$, протиче временски константна струја интензитета I . Израчунати компоненте вектора магнетске индукције у произвољној тачки простора изван траке.



$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left((\theta_2 - \theta_1) \hat{\mathbf{i}} + \ln \frac{r_2}{r_1} \hat{\mathbf{j}} \right).$$

38. Неограничен прав линијски проводник, са временски сталном струјом I , постављен је паралелно ивицама савршеног неограниченог дугог феромагнетског профила. Одредити електромагнетску силу по јединици дужине која дјелује на проводник, [23].

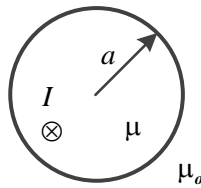


$$F' = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi ab(a^2 + b^2)} \sqrt{a^2(a^2 + 2b^2) + b^2(2a^2 + b^2)},$$

5.9. Питања и задаци за самостални рад

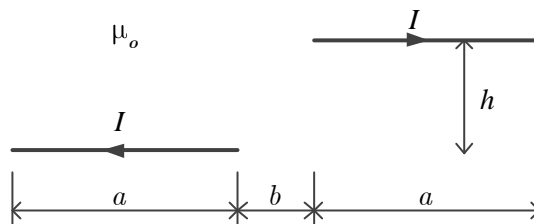
- Објаснити зашто временски промјенљиво електрично поље има двије компоненте. Известити израз за $E(t)$.
- Када временски промјенљиво поље можемо сматрати квазистационарним?

- Извести општи израз за рачунање индуковане електромоторне силе $e_{\text{ind}}(t)$ у контури C .
- Дугачак соленоид, полупречника кружног пресека a , у ваздуху, густо је и равномјерно намотан са подужном густином навојака N' . У навојима је простиопериодична струја $i(t) = I_m \cos \omega t$, ниске учесталости. Око соленоида постоји N_1 навојака, чији су крајеви остављени отворени. Одредити тренутну вриједност напона на крајевима ових навојака.
- Написати потпун систем Максвелових једначина у интегралном облику у временском домену за квазистационарно електромагнетско поље.
- Написати потпун систем Максвелових једначина у диференцијалном облику, у комплексном домену, за квазистационарно магнетско поље.
- Најважнија особина квазистационарног поља?
- У запремини V у вакууму, постоје струје густине \mathbf{J} и наелектрисања густине ρ . Поље ових извора задовољава услов квазистационарности. Написати изразе за рачунање електричног $\mathbf{E}(t)$ и магнетског поља $\mathbf{H}(t)$.
- Дефиниција сопствене и међусобне индуктивности?
- Извести израз за рачунање коефицијента међусобне индукције двије линијске контуре (Нојманова формула).
- Извести израз за рачунање сопствене индуктивности жичане контуре.
- За прав цилиндрични проводник, полупречника попречног пресека a , пермеабилности μ , који се налази у ваздуху, са стационарном струјом интензитета I , одредити магнетску енергију садржану у области проводника и коефицијент унутаршње подужне самоиндукције L' .



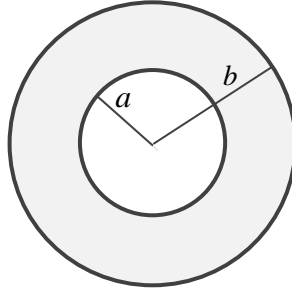
$$L' = \frac{2W'}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi}. \quad (\text{Коефицијент самоиндукције не зависи од полупречника проводника!})$$

- Када се унутрашња индуктивност може занемарити у односу на спољашњу индуктивност?
- Доказати да је **подужна међуиндуктивност** два сусједна праволинијска одсјечка исте дужине, истог правца, истих и супротних референтних смјерова струја, **константна** и да не зависи од дужине одсјечака ако су одсјечци веома близу, ($b \ll a$).



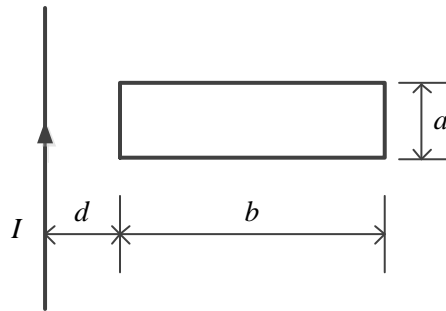
$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ (2a+b) \ln \frac{a+b+\sqrt{(a+b)^2+h^2}}{2a+b+\sqrt{(2a+b)^2+h^2}} - b \ln \frac{b+\sqrt{b^2+h^2}}{a+b+\sqrt{(a+b)^2+h^2}} + \sqrt{(2a+b)^2+h^2} - 2\sqrt{(a+b)^2+h^2} + \sqrt{b^2+h^2} \right\}.$$

- Шупљи бакарни проводник има дужину l и полупречнике a и b , $a < b$. Одредити унутрашњу индуктивност проводника по јединици дужине. Густина струје је равномјерно расподијељена по пресеку проводника.



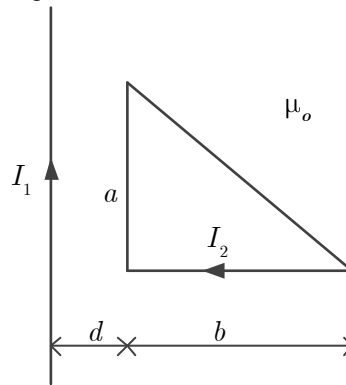
$$L'_u = \frac{\mu_o I}{2\pi(b^2 - a^2)^2} \left[\frac{b^2 + a^2}{4(b^2 - a^2)} - \frac{a^2}{b^2 - a^2} + \left(\frac{a^2}{b^2 - a^2} \right)^2 \ln \frac{b}{a} \right].$$

16. Одредити коефицијент међусобне индукције између неограниченог право-линијског проводника и правоугаоног рама, као на слици.



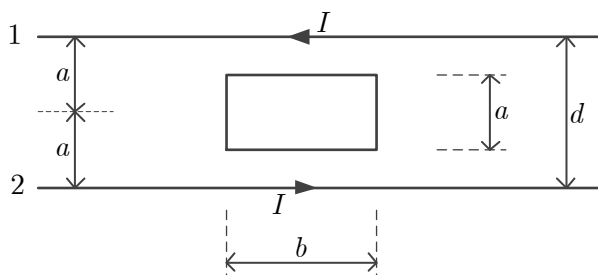
$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_o a}{2\pi} \ln \frac{b+d}{d}.$$

17. Одредити међусобну индуктивност проводника на слици.



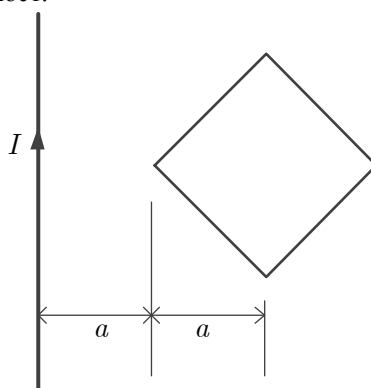
$$M = \frac{\mu_o}{2\pi} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \int_d^{d+b} \left(\frac{d+b}{r} - 1 \right) \cdot dr = \frac{\mu_o}{2\pi} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \left[(d+b) \ln \frac{d+b}{d} - b \right].$$

18. Између одлазног и повратног проводника двожичног вода кроз који протиче струја I , налази се правоугаони струјни рам са N завоја страница a и b , према слици. Одредити коефицијент међусобне индукције ако је $d = b = 2a$.



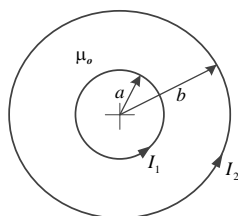
$$M = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N b}{\pi} \ln 3.$$

19. Правoliniјски бесконачно дуг проводник и квадратна контура дијагонала $2a$ леже у истој равни. Израчунати међусобну индуктивност.



$$L_{12} = \frac{\mu_0 a}{\pi} (3 \ln 3 - 4 \ln 2) = \frac{\mu_0 a}{\pi} (\ln 27 - \ln 16) = \frac{\mu_0 a}{\pi} \ln \frac{27}{16}.$$

20. Одредити коефицијент међуиндуктивности двије концентричне струјне контуре полупречника a и b , ($a \ll b$).



$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_2} = \mu_0 \frac{\pi a^2}{2b}.$$

21. Известити релацију за рачунање магнетске енергије квазистационарног поља.
22. Из општег израза за рачунање магнетске енергије у квазистационарном пољу у линеарној средини, $W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \mathbf{A} \cdot dV$, известити израз за рачунање магнетске енергије танког проводника. Уопштити добијени израз за N струјних контура.
23. Одредити узајамну енергију двије круте струјне контуре.
24. Објаснити како рачунамо магнетске силе и моменте преко магнетске енергије.
25. За ваздушни вод који се састоји од два паралелна цилиндрична проводника, полупречника кружног пресека a , међуосовинског растојања d , $d \gg a$, пермеабилности μ_0 , са константном струјом I , одредити: (а) подужну енергију садржану у воду (б) унутрашњу, спољашњу и укупну подужну индуктивност вода, (в) подужну силу између проводника.

$$W'_m = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d}{a} \right). \quad L' = \frac{2W'_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{d}{a} \right), \quad L'_i = \frac{\mu_0}{4\pi},$$

$$L'_e = \frac{\mu_o}{\pi} \ln \frac{d}{a}. \quad F' = \frac{\delta W'_m}{\delta d} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{a}{d} \frac{1}{a} I^2 = \frac{\mu_o I^2}{2\pi d}.$$

26. Извести израз за рачунање укупне подужне индуктивности коаксијалног кабла. Полупречник унутрашњег проводника је a , а унутрашњи и спољашњи полупречник плашта су b и c . Пермеабилност проводника је μ , а изолације кабла μ_o .

$$L' = \frac{\mu}{8\pi} + \frac{\mu_o}{2\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu}{2\pi} \left[\frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{c}{b} + \frac{b^2 - 3c^2}{4(c^2 - b^2)} \right].$$

27. Извести израз за рачунање индуктивности једне фазе трофазног вода у ваздуху. Међуосовинска растојања проводника дата су са d_{12} , d_{23} и d_{31} . Пермеабилност материјала проводника је μ_o . Полупречник пресека проводника је a .
28. За произвољан међусобни положај два **паралелна** двојична вода са врло танким проводницима, у ваздуху, извести израз за рачунање међусобне индуктивности.